Dadymdroelliad y modwlws cymhlyg mewn glud-elastigedd llinol

A. Russell Davies

Yr Ysgol Mathemateg, Prifysgol Caerdydd

Cyflwynwyd: 10 Hydref 2016; Derbyniwyd: 24 Ebrill 2017.

Crynodeb: Mae sbectrwm llaciad defnydd glud-elastig yn allweddol i ddisgrifio ei fecanweithiau llaciad ar lefel folecwlar. Mae hefyd yn chwarae rhan sylfaenol mewn cyrchu dosraniad pwysau molecwlar, ac mewn modelu dynameg llifyddion cymhleth. Ni ellir mesur y sbectrwm llaciad *yn uniongyrchol*, ond mae'n bosibl ei ddarganfod yn rhannol drwy fesuriadau arbrofol o ymateb glud-elastig ar lefel facrosgopig. Yn benodol, dosraniad di-dor o amserau llaciad yw'r sbectrwm llaciad, y gellir ei adfer, o leiaf yn lleol, wrth fesur modwlws cymhlyg y defnydd. Er y bu mynegiadau mathemategol ar gael am y sbectrwm di-dor am dros ganrif neu fwy, nid oedd y rhain yn caniatáu gweithredu rhifiadol am sawl degawd, gan fod hyn yn golygu gweithredyddion gwrthdroi nad ydynt yn ddi-dor, ac yn arwain at ansadrwydd eithriadol. Symudwyd ymlaen pan gyflwynwyd, rhyw ddau ddegawd yn ôl, ddulliau rheoleiddiadol am frasamcanu *sbectrymau llinell arwahanol*. Er hyn, roedd yn rhaid aros tan 2012 cyn i Davies a Goulding gynnig dull rheoleiddiad tonnell i adfer sbectrymau di-dor mewn fframwaith mathemategol manwl gywir. Datblygwyd y gwaith hwn ymhellach yn 2016 wrth gyflwyno ffurf fathemategol spectrosgopeg deilliad trefn uchel, sy'n cynnwys dilyniannau o ddeilliadau modwli dynamig, a elwir yn *ddilyniannau Maclaurin*. Yn yr erthygl hon, cyflwynir cyfiawnhad manwl gywir am ddefnyddio dilyniannau Maclaurin. Ymhellach, cyflwynir dilyniant newydd, a elwir yn *gywiriad dilyniant tonnell*, sy'n cyflawni'r un cywirdeb manwl â dilyniannau Maclaurin, gyda threfn differiad is.

Allweddeiriau: Glud-elastigedd llinol, dadymdroelliad, sbectrwm llaciad di-dor, y modwlws cymhlyg, dilyniannau tonnell.

Deconvolution of the Complex Modulus in Linear Viscoelasticity

Coleg Cymraeg Cenedlaethol
ISSN: 1741-4261
http://gwerddon.cymru

Abstract: *The relaxation spectrum of a viscoelastic material holds the key to describing its relaxation mechanisms at a molecular level. It also plays a fundamental role in accessing the molecular weight distribution, and in modelling the dynamics of complex fluids. The relaxation spectrum cannot be measured* directly*, but it may be locally determined from experimental measurements of viscoelastic response at a macroscopic level. In particular, the relaxation spectrum is a continuous distribution of relaxation times which may be recovered, at least locally, from measurements of the complex modulus of the material. Although mathematical expressions for the continuous spectrum have been known for over a century, these were inaccessible to numerical implementation for decades, since they involve inverse operators which are not continuous, resulting in severe instability. Progress was made when regularization methods for approximating* discrete line spectra *were introduced some two decades ago. It was not until 2012, however, that Davies and Goulding proposed a method of wavelet regularization for recovering continuous spectra in a mathematically rigorous framework. This work was further refined in 2016 by introducing a mathematical form of high-order derivative spectroscopy involving sequences of derivatives of dynamic moduli, termed* Maclaurin sequences*. In this article, a rigorous justification for the use of Maclaurin sequences is presented. Furthermore, a new sequence is presented, which is termed a* wavelet correction sequence*, achieving the same accuracy as Maclaurin sequences, but with a reduced order of differentiation.*

Keywords: Linear viscoelasticity, deconvolution, continuous relaxation spectrum, complex modulus, wavelet sequences.

1 Rhagymadrodd

Mae'r rhan fwyaf o'r defnyddiau y ceir profiad ohonynt bob dydd yn ddefnyddiau glud-elastig. Rhai enghreifftiau yw polymerau, plastigion, defnyddiau cyfansawdd, bwydydd, hylifau biolegol, olewau, paentiau a geliau. Mae nodweddion gludiog ac elastig yn bresennol yn y defnyddiau hyn, a than rym allanol, mae'r anffurfiad sy'n dilyn yn gyfuniad o ymateb gludiog ac ymateb elastig. Er mwyn modelu ymddygiad glud-elastig yn fathemategol ac yn gyfrifiannol, mae'n rhaid disgrifio mudiant moleciwlau cadwynol hir, hyblyg ac edafaidd. Cyfraniad pwysig i'r disgrifiad hwn yw theori ffenomenolegol *glud-elastigedd llinol* (Ferry 1970; Tschoegl 1989).

Mae glud-elastigedd llinol yn disgrifio'r berthynas rhwng diriant a straen mewn defnydd glud-elastig, am ddosbarth cyfyngedig o lifyddion ac anffurfiadau sy'n dioddef straeniau a chyfraddau straen bychan iawn. Er gwaethaf cyfyngiadau'r theori, mae ganddi arwyddocâd sylfaenol oherwydd bod rhai ffwythiannau allweddol y defnydd, sy'n codi yn y theori, hefyd yn chwarae rhan mewn modelu llifyddion cymhleth mewn cyfundrefnau llinol ac aflinol. Mae'r diriant yn y defnydd yn dibynnu nid yn unig ar y straen cyfredol, neu gyfradd y straen cyfredol, ond hefyd ar hanes y straen a fu. Am y rheswm hwn, gelwir defnyddiau glud-elastig yn *ddefnyddiau gyda chof*. Gall y prosesau llaciad ddigwydd ar amrywiaeth o raddfeydd amser gwahanol, a'r ffwythiant allweddol wrth fodelu hyn yw *modwlws llaciad* y defnydd. Y ffwythiant hwn yw'r dadfeiliad amserol mewn diriant o ganlyniad i godiad enydaidd o un uned yn y straen. Gellir ystyried y modwlws llaciad fel arosodiad o fecanweithiau llaciad gwahanol, bob un yn dadfeilio ar raddfa amser wahanol. Enw dosraniad yr amserau llaciad (cyfraddau dadfeilio) yw *sbectrwm llaciad* y defnydd.

Mewn gwirionedd, mae dosraniad amserau llaciad mewn defnydd glud-elastig yn anfeidraidd: yn benodol, yn cynnwys *sbectrwm llaciad di-dor* (CRS). Yn yr hyn sy'n dilyn, ymchwilir i nodweddion mathemategol yr CRS yn fanwl. Mewn cymwysiadau peirianneg, brasamcenir y sbectrwm gan nifer meidraidd o ffwythiannau esbonyddol amser, bob un ohonynt yn dadfeilio. Mae'r brasamcan hwn, a'i ddadfeiliad esbonyddol, yn offeryn cyfleus i gynrychioli data arbrofol, ac y mae wedi arwain at ymestyniadau arwyddocaol mewn modelu cyfrifiannol. Er hynny, mae ymchwil ddiweddar yn dangos bod cyfyngiadau ar ddefnyddioldeb y brasamcan (McDougall 2014; Anderssen et al. 2015; Ankiewitz et al. 2016). Heddiw, felly, mae diddordeb yn yr CRS cywir yn cynyddu o'r newydd.

Mae sbectrwm llaciad yn bwysig, nid yn unig i ddisgrifio'r modwlws llaciad, ond hefyd i ddadlennu cydgysylltiadau rhwng y modwlws a nodweddion eraill y defnydd, fel *ymgripiad* a *dosraniad pwysau moleciwlar*. Ni ellir mesur sbectra arwahanol na sbectra di-dor *yn uniongyrchol* drwy arbrofi, ond mae'n bosibl eu hadfer drwy fesuriadau *anuniongyrchol*, wrth ddatrys un neu ragor o broblemau gwrthdro. Mae'r erthygl hon yn disgrifio'r cefndir i adfer CRS drwy ddadymdroelliad gan gyfresi, ac yn cyflwyno dilyniant newydd o ddeiliadau sy'n cyflymu'r broses.

Llunnir yr erthygl fel a ganlyn. Yn Adran 2, crynhoir y prif gysyniadau mathemategol sy'n tanategu glud-elastigedd llinol. Mae Adran 3 yn dangos sut i adfer yr CRS drwy gyfresi deilliad modwlws stôr a'r modwlws colled, ar wahân, tra bod Adran 4 yn cyflwyno cyfresi newydd sy'n clymu deilliadau'r ddau fodwlws (*cyfresi deilliad cymysg*). Mae Adran 5 yn cyflwyno amodau digonol a theoremau am gydgyfeiriant cyfresi. Yn Adran 6, darlunnir cydgyfeiriant rhifiadol, tra bod Adran 7 yn archwilio dilyniant o ddeilliadau sy'n trosglwyddo *cywiriad dilyniant tonnell*, a'i gyfernodau wedi eu dethol er mwyn cyflymu cydgyfeiriant rhifiadol.

2 Cefndir mathemategol

Mae theori fathemategol glud-elastigedd llinol yn tarddu o ail hanner y bedwaredd ganrif ar bymtheg. Cyfranwyr cynnar oedd Kelvin, Maxwell, Meyer a Voigt, ond y cyfrannwr mwyaf arwyddocaol a phellgyrhaeddol o bell ffordd oedd Boltzmann. Am drafodaeth a llyfryddiaeth fanwl am yr hanes, gweler Tanner et al. (1998). Mewn anffurfiad croeswasgu anghywasg, mae model integryn llinol cyffredinol Boltzmann yn cysylltu'r diriant $\sigma(t)$ â chyfradd y straen $\dot{\gamma}(t)$ yn y ffurf

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\dot{\gamma}(t')dt', \tag{1}$$

lle y mae $G(t)$ yn dynodi'r modwlws llaciad, sy'n bositif, yn lleihau yn fonotonig, ac yn ffwythiant differadwy di-dor o amser, t. Diffiniwyd *ffwythiant cof* y defnydd drwy'r deilliad cyntaf fel $-\dot{G}(t)$, sydd hefyd yn lleihau yn fonotonig, yn unol ag egwyddor cof sy'n pylu (Saut et al., 1983).

Mae hyn yn golygu bod $\dot{G}(t)$ yn cynyddu'n fonotonig. Ond dywed theorem Bernstein (1928) fod deilliadau olynol $G(t)$ o bob trefn yn cynyddu ac yn lleihau bob yn ail yn fonotonig os, a dim ond os, yw $G(t)$ yn drawsffurf Laplace o fesur positif. O dan y cyfyngiad hwn, gelwir $G(t)$ yn *hollol fonotonig*, a medrir ei ysgrifennu yn y ffurf

$$G(t) = G_e + \int_{0}^{\infty} H(\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{d\tau}{\tau}, \tag{2}$$

lle y mae G_e yn gysonyn y defnydd, a roddwyd gan

$$G_e = \lim_{t\to\infty} G(t), \tag{3}$$

gyda'r CRS cysylltiol, $H(\tau)$, yn ymddangos amrediad di-dor o amserau llaciad, τ. Mae hafaliad (2) yn gweithredu fel diffiniad mathemategol o'r CRS. Yn unol â theorem Bernstein, tybir drwy'r erthygl bod $H(\tau) \geq 0$.

Fel y nodwyd yn y rhagymadrodd, ni ellir mesur y sbectrwm llaciad yn uniongyrchol, a rhaid ei ddarganfod drwy fesuriadau anuniongyrchol. Dull cyffredin yw samplu *modwlws cymhlyg* y defnydd (gweler hafaliad (6)) ar amleddau gwahanol mewn arbrawf croeswasgiad osgiliadol (Walters 1975). Gweithredir straen osgiliadol osgled bach yn y ffurf

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0 e^{i\omega t} & \text{os yw } t \geq 0; \\ 0 & \text{os yw } t < 0, \end{cases} \tag{4}$$

gydag amledd onglog cyson, ω. Yna, gellir ailysgrifennu (1) yn y ffurf

$$\sigma(t) = G^*(\omega)\gamma(t) + o(1), \tag{5}$$

lle y mae $G^*(\omega)$ yn diffinio'r modwlws cymhlyg (a elwir hefyd yn *fodwlws cymhlyg croeswasgiad*, neu'r *modwlws dynamig*) fel ffwythiant o'r amledd. Rhoddir y modwlws hwn gan

$$G^*(\omega) = G_e + i\omega\int_{0}^{\infty} [G(t') - G_e]e^{-i\omega t'}dt'. \tag{6}$$

O dan y trawsffurfiad $z = i\omega^{-1}$, mae'n dilyn o (6) bod $G^*(\omega)$ yn perthyn i'r CRS drwy'r trawsffurfiau Steiltjes cymhlyg:

$$G^*(\omega) = G_e + \int_{0}^{\infty} \frac{i\omega}{1+i\omega\tau}H(\tau)d\tau = G_e + \int_{0}^{\infty}\frac{H(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{7}$$

Petai modd mesur $G^*(\omega)$ ar bob amledd $0 < \omega < \infty$, yna, mewn egwyddor, byddai modd gwrthdroi (7) i ildio'r sbectrwm am bob amser llaciad $0 < \tau < \infty$. Mae'n bosibl ailwneud arbrawf croeswasgiad osgiliadol, sut bynnag, dros amrediad amleddau cyfyngedig yn unig, sy'n golygu bod defnyddio fformiwlâu gwrthdro cymwys dros gyfwng hanner-anfeidraidd yn broblematig. Ymhellach, pan fo z yn llwyr ddychmygol, fel y mae'r sefyllfa yn (7), mae adfer y sbectrwm o'r modwlws cymhlyg yn broblem â gwael-osodiad esbonyddol (Davies et al., 2012), ac mae'r adferiad yn ansefydlog dros ben mewn perthynas â newidiadau bychain yn y data.

Gelwir rhan real $G^*(\omega)$ yn *fodwlws stôr*, a ddynodir gan $G'(\omega)$, tra gelwir y rhan ddychmygol yn *fodwlws colled*, a ddynodir gan $G''(\omega)$. Rhoddir y rhain gan bâr o hafaliadau integrol Fredholm:

$$G'(\omega) = G_e + \int_0^\infty \frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} H(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \tag{8}$$

$$G''(\omega) = \int_0^\infty \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} H(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \tag{9}$$

sy'n rhannau real a dychmygol (7). Mae'n rhaid i'r hafaliadau Fredholm (8) a (9) rannu'r un datrysiad H, nodwedd sy'n deillio o ddadansoddiaeth $G^*(\omega)$ yn hanner plân ochr dde'r amledd cymhlyg. Mae $G'(\omega)$ a $G''(\omega)$ yn gysylltiedig drwy berthnasau Kramers-Krönig (Tschoegl 1989).

Heb golli cyffredinolrwydd, gosodir y cysonyn G_e yn sero, fel sy'n berthnasol i hylifau glud-elastig. Mater hawdd yw ychwanegu $G_e > 0$, sy'n angenrheidiol ar gyfer solid glud-elastig.

3 Adfer y sbectrwm drwy broblem dadymdroelliad

Gellir ysgrifennu hafaliadau (8) a (9) ar ffurf ymdroelliad wrth ddewis newidyn logarithmig $x = \ln\omega$. Gadewch i

$$H(\omega^{-1}) = h(x), \quad G'(\omega) = \tfrac{1}{2}g_1(x), \quad \text{a} \quad G''(\omega) = \tfrac{1}{2}\mathrm{g}_2(\mathrm{x}). \tag{10}$$

Yna, gyda $G_e = 0$, mae (8) a (9) yn cyfateb i

$$g_1(x) = [1+\tanh(x)] \star h(x), \tag{11}$$

$$g_2(x) = \mathrm{sech}(x) \star h(x), \tag{12}$$

lle y mae $\star$ yn dynodi ymdroelliad, h.y.

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)ds. \tag{13}$$

Drwy'r erthygl hon, tybir bod $h(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ er mwyn galluogi trawsffurf Fourier, $\hat{h}$, i fodoli. Y confensiwn am drawsffurfiad Fourier yw

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\xi t}dt. \tag{14}$$

Ar sail (11) a (12), mae'n dilyn bod $g_1(x) \notin L^1(\mathbf{R})$ a $g_2(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$. Mae trawsffurf $g_1(x)$ yn bod yn ystyr dosraniadau yn unig. Er hynny, mae modd datrys (11) a (12) gan ddefnyddio theorem ymdroelliad Fourier.

Wrth ddifferu (11) a thrawsffurfio, gwelir bod

$$i\xi\widehat{g_1}(\xi) = 2\bar{\xi}\text{cosech}\left(\bar{\xi}\right)\widehat{h}(\xi), \quad \text{lle y mae} \quad \bar{\xi} = \frac{\pi}{2}\xi.$$

Mae'n dilyn bod

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{2}\bar{\xi}^{-1}\sinh\left(\bar{\xi}\right) i\xi\widehat{g_1}(\xi), \tag{15}$$

gyda didoriad pan fo $\xi = 0$. Mewn modd tebyg, wrth nodi bod trawsffurf $\text{sech}(x)$ yn $\pi\text{sech}\left(\bar{\xi}\right)$, mae'n dilyn o (12) bod

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\pi}\cosh\left(\bar{\xi}\right)\widehat{g_2}(\xi). \tag{16}$$

Wrth ddisodli'r ffwythiannau hyperbolig yn (15) ac (16) gan eu cyfresi Maclaurin, a thrawsffurfio'n wrthdro term wrth derm, datrysir (11) a (12) yn y ffurf

$$h(x) = h_1(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2r+1)!}\bar{D}^{2r+1}g_1(x), \tag{17}$$

$$\text{a} \quad h(x) = h_0(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2r)!}\bar{D}^{2r}g_2(x), \tag{18}$$

yn ôl eu trefn, gyda

$$h_0(x) = \tfrac{1}{\pi}g_2(x), \quad h_1(x) = \tfrac{1}{2}Dg_1(x) = \tfrac{1}{\pi}\bar{D}g_1(x), \tag{19}$$

lle y mae D, $\bar{D}$ yn dynodi'r gweithredyddion differol

$$D = \frac{d}{dx}, \quad \bar{D} = \frac{\pi}{2}D. \tag{20}$$

Rhoddir amodau digonol ar gyfer cydgyfeiriant y cyfresi (17) a (18) yn Adran 5, ynghyd â phrawf o'r cydgyfeiriant. Gall cydgyfeiriant rhifiadol y cyfresi gymryd 9 neu 10 trefn differiad. Yng nghyswllt data arbrofion y modwlws stôr a'r modwlws colled, dangosodd Davies et al. (2016) sut i gyflawni differiad trefn uchel gan ddefnyddio tonellau Gegenbauer pwysol. Yn Adrannau 6 a 7, sut bynnag, gofynnir a yw cydgyfeiriant rhifiadol mwy cyflym yn bosibl, gan ddefnyddio trefn differiad is. Atebir y cwestiwn wrth ddilyn dau lwybr cydgysylltiedig:

(1) deilliad cyfresi sy'n cynnwys deilliadau o'r ddau ffwythiant data g_1 a g_2 (*cyfres ddeilliadol gymysg*);

(2) lluniad cyfresi deilliadol trefn feidraidd, lle yr optimeiddir y cyfernodau i gyflymu cydgyfeiriant rhifiadol.

4 Dadymdroelliad y modwlws cymhlyg

Mae'n bosibl creu cyfresi sy'n cynnwys deilliadau'r ddau ffwythiant g_1 a g_2 yn syml, drwy gymryd cyfuniadau llinol o'r hafaliadau (17) a (18). Fel enghraifft, ystyrier y gyfres ddeilliadol gymysg

$$h(x) = \tfrac{3}{2}h_1(x) - \tfrac{1}{2}h_0(x) + \frac{1}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r[\frac{3}{(2r+1)!}\bar{D}^{2r+1}g_1(x) - \frac{1}{(2r)!}\bar{D}^{2r}g_2(x)]. \quad (21)$$

Dangosir yn Adran 6 bod y gyfres (21) yn cydgyfeirio'n gynt na'r ddwy gyfres (17) a (18). Am drafodaeth ar y brasamcan trefn gyntaf yn (21), gweler Anderssen et al. (2016).

Mae'r gyfres (21) yn rhannu ei dau derm cyntaf â'r gyfres ddiddorol:

$$h(x) = \tfrac{3}{2}h_1(x) - \tfrac{1}{2}h_0(x) + \frac{1}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r[\frac{3^{2r+1}}{(2r+1)!}\bar{D}^{2r+1}g_1(x) - \frac{3^{2r}}{(2r)!}\bar{D}^{2r}g_2(x)]. \quad (22)$$

Nid yw'r gyfres hon yn gyfuniad llinol o (17) a (18). Un tarddiad o'i thrawsffurfiad Fourier yw'r unfathiant hyperbolig:

$$1 = \tfrac{1}{2}[\sinh(3\bar{\xi})\mathrm{cosech}(\bar{\xi}) - \cosh(3\bar{\xi})\mathrm{sech}(\bar{\xi})]. \quad (23)$$

Wrth luosi'r ddwy ochr yn (23) â $\hat{h}(\xi)$, ceir

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{2\pi}[\sinh(3\bar{\xi})\xi^{-1}\widehat{\mathrm{D}g_1}(\xi) - \cosh(3\bar{\xi})\widehat{g_2}(\xi)]. \quad (24)$$

Mae'r gyfres (22) yn dilyn wrth ehangu'r ffwythiannau sinh a cosh, a thrawsffurfio'n wrthdro term wrth derm.

Yr hyn sy'n ddiddorol ynghylch y gyfres (22) yw ei bod hi'n ymddangos yn syth drwy ddadymdroelli'r hafaliad

$$g_1(x) + ig_2(x) = [1 + \tanh(x) + i\mathrm{sech}(x)] \star h(x). \quad (25)$$

Hwn yw'r hafaliad ymdroelliad am y modwlws cymhlyg wedi ei gymryd fel ffwythiant gwerth-gymhlyg. I ddeillio (24) o (25), differwch (25) a chymerwch ei drawsffurfiad Fourier i roi

$$\widehat{Dg_1}(\xi) - \xi\widehat{g_2}(\xi) = 2\bar{\xi}[\mathrm{cosech}(\bar{\xi}) - \mathrm{sech}(\bar{\xi})]\hat{h}(\xi). \quad (26)$$

Nawr, gan fod h yn ffwythiant gwerth-real, mae $\hat{h}$ a $\widehat{Dg_1}$ yn ffwythiannau cyfiau Hermitaidd, tra bod $\xi\widehat{g_2}(\xi)$ yn wrth-Hermitaidd. Nid yw'n syndod, felly, bod hafalu'r rhannau Hermitaidd yn (26) yn arwain at (15), tra bod hafalu'r rhannau gwrth-Hermitaidd yn arwain at (16). Ar y llaw arall, mae mynegi $\hat{h}$ yn (26) yn nhermau rhan Hermitaidd

$$\frac{\widehat{Dg_1}(\xi) - \xi\widehat{g_2}(\xi)}{2\bar{\xi}[\mathrm{cosech}(\bar{\xi}) - \mathrm{sech}(\bar{\xi})]}$$

yn arwain at

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{4\pi}[\sinh(3\bar{\xi}) + \sinh(\bar{\xi})]\xi^{-1}\widehat{\mathrm{Dg_1}}(\xi) - \frac{1}{4\pi}[\cosh(3\bar{\xi}) - \cosh(\bar{\xi})]\widehat{\mathrm{g}_2}(\xi). \tag{27}$$

Mae hafaliad (24) nawr yn dilyn o (27) gan symlhau'r ochr dde wrth ddefnyddio (15) a (16), ac yn ad-drefnu.

Sylwer bod yr unfathiant (23) yn wahaniaeth rhwng dau ffwythiant â'r un tyfiant esbonyddol. Pan fo'r ffwythiannau sinh a cosh yn cael eu disodli gan eu cynrychioliadau cyfresi, nid yw cyfraddau tyfiant eu symiau rhannol bellach yr un fath â'i gilydd. Gosoda'r briodwedd hon feini prawf cydgyfeiriant ar (22) sy'n fwy caeth nag sydd eu hangen ar gyfer cyfresi (17), (18) a (21).

5 Cydgyfeiriant

Mae'r cyfresi deilliadol a gyflwynwyd mor belled wedi eu deillio yn ffurfiol. Mae angen amodau digonol ar gyfer cydgyfeiriant, ac fe'u darperir yn yr adran hon. Mae mwy nag un dull yn bosibl i astudio amodau digonol, ond yma telir sylw i amodau medrusrwydd integru a chydgyfeiriant dominyddedig (*dominated convergence*). Ystyrier y tair cyfres o symiau rhannol sy'n dilyn:

Am $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$h_{2n+1}(x) = h_1(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r}{(2r+1)!}\bar{D}^{2r+1}g_1(x), \tag{28}$$

$$h_{2n}(x) = h_0(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r}{(2r)!}\bar{D}^{2r}g_2(x), \tag{29}$$

$$h^*_{2n+1}(x) = \tfrac{3}{2}h_1(x) - \tfrac{1}{2}h_0(x) + \frac{1}{2\pi}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r[\frac{3^{2r+1}}{(2r+1)!}\bar{D}^{2r+1}g_1(x) - \frac{3^{2r}}{(2r)!}\bar{D}^{2r}g_2(x)]. \tag{30}$$

Yn gyntaf, yn Theorem 5.1 isod, rhoddir amodau i ganiatáu $h_{2n+1}(x) \to h(x)$ a $h_{2n}(x) \to h(x)$ fel bod $n \to \infty$, am bob $x \in \mathbf{R}$. Defnyddir y canlyniadau safonol sy'n dilyn: (1) Gadewch i f_1, f_2 fod yn ffwythiannau gwerth-real a $\widehat{f_1}$, $\widehat{f_2}$ fod eu trawsffurfiau Fourier. Gadewch i $\widehat{f_1}$ a $f_2 \in L^1(\mathbf{R})$. Yna, gyda f_2 yn eil-ffwythiant, yn sicrhau bod $\widehat{f_2}$ yn werth-real, mae:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y)f_2(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f_1}(\xi)\widehat{f_2}(\xi)e^{ix\xi}d\xi. \tag{31}$$

(2) Am unrhyw gyfanrif $r \geq 0$, mae $\bar{D}^{2r}\mathrm{sech(x)}$ yn bolynomial od-bŵer yn sech(x) o radd $2r+1$, ac mae $\bar{D}^{2r}\mathrm{sech}^2\mathrm{(x)}$ yn bolynomial eil-bŵer yn sech(x) o radd $2r+2$. Mae'r ddau ganlyniad hwn yn rhwydd i'w sefydlu drwy anwythiad. Felly, mae $\bar{D}^{2r}\mathrm{sech(x)}$ a $\bar{D}^{2r}\mathrm{sech}^2\mathrm{(x)} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathrm{C}(\mathbf{R})$.

Theorem 5.1. Gadewch i $h \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ a $\hat{h} \in L^1(\mathbf{R})$. Yna, mae $h_{2n+1}(x) \to h(x)$ a $h_{2n}(x) \to h(x)$ am bob $x \in \mathbf{R}$.

Prawf. Am bob $n \geq 0$, gadewch i

$$F_n(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} \bar{D}^{2r} \mathrm{sech}^2(\mathrm{x}), \tag{32}$$

ac felly

$$\widehat{F_n}(\xi) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\bar{\xi}^{2r+1}}{(2r+1)!} \mathrm{cosech}(\bar{\xi}). \tag{33}$$

Gan fod $\bar{D}^{2r}\mathrm{sech}^2(\mathrm{x}) \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathrm{C}(\mathbf{R})$ am bob $r \geq 0$, a $h_{2n+1} = F_n \star h$, mae $h_{2n+1} \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$. Yna, wrth ddefnyddio (31),

$$h_{2n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y) F_n(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi) \widehat{F_n}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \tag{34}$$

Nawr, mae $\hat{h}(\xi)\widehat{F_n}(\xi)e^{ix\xi} \to \hat{h}(\xi)e^{ix\xi}$ am bob $\xi \in \mathbf{R}$ fel bod $n \to \infty$, a $|\hat{h}(\xi)\widehat{F_n}(\xi)e^{ix\xi}| \leq |\hat{h}(\xi)|$. Felly, drwy gydgyfeiriant dominyddedig, mae $h_{2n+1}(x) \to h(x)$ bron ym mhobman. Ond mae h a h_{2n+1} yn ddi-dor. Felly, mae $h_{2n+1}(x) \to h(x)$ am bob $x \in \mathbf{R}$.

I brofi bod $h_{2n}(x) \to h(x)$ am bob $x \in \mathbf{R}$, mae'r ddadl uchod yn parhau'n berthnasol wrth ddisodli $F_n(x)$ a $\widehat{F_n}(\xi)$ gyda

$$F_n(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{(2r)!} \bar{D}^{2r} \mathrm{sech}(\mathrm{x}) \quad \text{a} \quad \widehat{\mathrm{F}_\mathrm{n}}(\xi) = \sum_{\mathrm{r}=0}^{\mathrm{n}} \frac{\bar{\xi}^{2\mathrm{r}}}{(2\mathrm{r})!} \mathrm{sech}(\bar{\xi}). \tag{35}$$

Nid yw'r amodau a fynegwyd yn Theorem 5.1 yn ddigon i sicrhau cydgyferiant y gyfres $h^*_{2n+1}(x)$ a roddwyd yn (30). I weithredu cydgyfeiriant dominyddedig, mae'n rhaid gofyn am gyfyngiad ychwanegol ar gyfradd dadfeiliad $\hat{h}(\xi)$ fel bod $\xi \to \pm\infty$.

Gadewch i

$$A_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{3^{2r+1}}{(2r+1)!} \bar{D}^{2r} \mathrm{sech}^2(\mathrm{x}) \tag{36}$$

$$\text{a} \quad B_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{3^{2r}}{(2r)!} \bar{D}^{2r} \mathrm{sech}(\mathrm{x}), \tag{37}$$

ac felly

$$\widehat{A_n}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n} \frac{(3\bar{\xi})^{2r+1}}{(2r+1)!} \mathrm{cosech}(\bar{\xi}) \quad \text{a} \quad \widehat{\mathrm{B}_\mathrm{n}}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{r}=0}^{\mathrm{n}} \frac{(3\bar{\xi})^{2\mathrm{r}}}{(2\mathrm{r})!} \mathrm{sech}(\bar{\xi}). \tag{38}$$

Yna, mae $\widehat{A_n}(\xi) \to A(\xi)$ a $\widehat{B_n}(\xi) \to B(\xi)$ am bob $\xi \in \mathbf{R}$ fel bod $n \to \infty$, lle y mae

$$A(\xi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{sinh}(3\bar{\xi})\mathrm{cosech}(\bar{\xi}) \quad \text{a} \quad \mathrm{B}(\xi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{cosh}(3\bar{\xi})\mathrm{sech}(\bar{\xi}). \tag{39}$$

Yn anffodus, nid yw'r amod $\hat{h} \in L^1(\mathbf{R})$, ynddo'i hun, yn sicrhau y ceir ffwythiant terfan yn $L^1(\mathbf{R})$ i'r gyfres ffwythiannau $[\widehat{A_n}(\xi) - \widehat{B_n}(\xi)]\hat{h}(\xi)$. Er hynny, mae rhai ffwythiannau $\hat{h}(\xi) \in L^1(\mathbf{R})$, sy'n dadfeilio'n gyflym, yn caniatáu bod y derfan yn bod.

Diffiniad. Am $\sigma > 0$, dywedir bod h yn perthyn i ddosbarth $\mathcal{M}_\sigma$ os yw'r amodau isod yn parhau:
(i) $h \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ a $\hat{h} \in L^1(\mathbf{R})$;
(ii) mae ffwythiant $m(\xi) \in L^1(\mathbf{R})$ yn bod, sy'n annegyddol ac yn ffinedig, fel bod am bob $\xi \in \mathbf{R}$

$$|\hat{h}(\xi)| \leq \mathrm{cosech}(\sigma\bar{\xi})\mathrm{sinh}(\bar{\xi})\mathrm{m}(\xi) \quad \text{a} \quad |\hat{\mathrm{h}}(\xi)| \leq \mathrm{sech}(\sigma\bar{\xi})\mathrm{cosh}(\bar{\xi})\mathrm{m}(\xi). \tag{40}$$

Enghreifftiau.
(E1) Am unrhyw gysonyn λ, mae $\mathrm{sech}(\lambda\bar{\xi}) \in \mathcal{M}_\sigma$ os yw $\lambda > \sigma - 1$, a $\mathrm{sech}(\lambda\bar{\xi}) \notin \mathcal{M}_\sigma$ os yw $0 \leq \lambda \leq \sigma - 1$.
(E2) Mae rhai ffwythiannau annegyddol band-gyfyngedig yn $\mathcal{M}_\sigma$ am bob $\sigma > 0$.
(E3) Os yw h yn $\mathcal{M}_\rho$ am ryw $\rho < \sigma$, yna mae hefyd yn $\mathcal{M}_\sigma$.

Theorem 5.2. Gadewch i $h \in \mathcal{M}_3$. Yna, mae $h^*_{2n+1}(x) \to h(x)$ am bob $x \in \mathbf{R}$.

Prawf. Eto, mae hyn yn gymhwysiad syml o theorem cydgyferiant dominyddedig Lebesgue. Am bob $x \in \mathbf{R}$, a phob $\xi \in \mathbf{R}$,

$$[A_n(\xi) - B_n(\xi)]\hat{h}(\xi)e^{ix\xi} \to [A(\xi) - B(\xi)]\hat{h}(\xi)e^{ix\xi} = \hat{h}(\xi)e^{ix\xi}, \tag{41}$$

lle y mae'r cam diwethaf yn dibynnu ar yr unfathiant (23). Hefyd, mae

$$|[A_n(\xi) - B_n(\xi)]\hat{h}(\xi)e^{ix\xi}| \leq [A_n(\xi) + B_n(\xi)]|\hat{h}(\xi)| \leq m(\xi), \tag{42}$$

gan fod $h \in \mathcal{M}_3$. Felly, drwy gydgyfeiriant dominyddedig, fel bod $n \to \infty$, mae

$$h^*_{2n+1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A_n(\xi) - B_n(\xi)]\hat{h}(\xi)e^{ix\xi}dx \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\xi)e^{ix\xi}dx = h(x).$$

(Wedi i'r awdur gyflwyno'r erthygl hon i Gwerddon, cyhoeddwyd amodau digonol eraill sy'n sicrhau cydgyfeiriant y gyfres (29) gan R. J. Loy et al. Gweler: Loy, R. J. et al. (2017), 'Convergence in relaxation spectrum recovery', *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 95(1), 121–32.)

6 Meintioli cyfeiliornad a chyfradd cydgyfeiriant yn rhifiadol

Pwrpas yr adran hon yw darganfod mesur rhifiadol cyfradd gydgyfeiriant cyfresi amrywiol, gyda'r bwriad o ganfod pan fo un gyfres yn cydgyfeirio'n fwy cyflym nag un arall. Gadewch i

$$h_{k(n)} = \alpha_0 h_0 + \alpha_1 h_1 + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{n}[\alpha_{2r}\bar{D}^{2r}g_2 + \alpha_{2r+1}\bar{D}^{2r+1}g_1], \tag{43}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots,$ fod yn gyfres gyffredinol sy'n cydgyfeirio at h. Mae'r cyfernodau α_r yn gyson, ac yn annibynnol ar n, ac y mae'r cyfanrif $k(n)$ yn dynodi trefn y deilliad uchaf ar yr ochr dde. Felly, mae $k(n) = 2n$ os yw $\alpha_{2n+1} = 0$, a $k(n) = 2n + 1$ os yw $\alpha_{2n+1} \neq 0$. Gellir ysgrifennu pob cyfres a ystyriwyd mor belled yn y modd hwn. Dewisir y cyfernodau α_0 a α_1 i fodloni

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 1. \tag{44}$$

Mae pob h yn bodloni'r *cyfyngiad modwlws gwydrog*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h dx = G(0) = G'(\infty), \tag{45}$$

ac y mae'r hafaliad (44) yn sicrhau bod $h_{k(n)}$ hefyd yn bodloni'r cyfyngiad hwn am bob n.

Gadewch i $\{h_k\}_0^\infty$ fod yn unrhyw gyfres sy'n cydgyfeirio at h. Ystyriwch y *ffwythiant cyfeiliornad* $h - h_k$, a gadewch i $\phi \in L^1(\mathbf{R}) \cap C^\infty(\mathbf{R})$ fod yn ffwythiant prawf. Yn sicr, mae'r norm $\|\phi - \phi_k\|_\infty$ yn *un* mesur o gyfradd cydgyfeiriant y gyfres ϕ_k. Gellir defnyddio'r mesur hwn i gymharu, yn rhifiadol, gyfraddau cydgyfeiriant cyfresi gwahanol. Hefyd, mae modd dweud mwy am ddewis y mesur hwn. Mae natur gymudol y gweithredydd differu ac ymdroelli yn golygu bod

$$(h - h_k) \star \phi = (\phi - \phi_k) \star h, \tag{46}$$

ac felly, gan apelio at achos arbennig anhafaledd Young am ymdroelliadau, mae'n dilyn bod

$$\|(h - h_k) \star \phi\|_\infty \leq \|\phi - \phi_k\|_\infty \|h\|_1, \tag{47}$$

a,

$$\|(h - h_k) \star \phi\|_\infty \leq \|h - h_k\|_\infty \|\phi\|_1. \tag{48}$$

Nid oes rhaid i'r naill amcangyfrif na'r llall fod yn siarp, ond os yw'r ddau amcangyfrif yn lleihau yn fras ar yr un gyfradd â $\|(h - h_k) \star \phi\|_\infty$ fel bod k yn cynyddu, maent yn lleihau'n fras ar yr un gyfradd â'i gilydd. Yn yr achos hwn, mae'r mesur $\|\phi - \phi_k\|_\infty$ yn cynrychioli cyfradd gydgyfeiriant amrediad o ffwythiannau gwahanol, h.

Nawr, gadewch i $\phi(x) = \mathrm{sech}(\mathrm{x})$. Daw ochr chwith (47), felly, i $\|g_2 - g_{2,k}\|_\infty$, sy'n mesur cyfeiliornad ffit i'r data g_2 gan y brasamcan $g_{2,k} = \mathrm{sech} \star h_k$. Ymhellach, mae arbrofion rhifiadol yn dangos bod yr amcangyfrif (47), wrth ddewis y ϕ hon, yn lleihau yn fras ar yr un gyfradd â $\|g_2 - g_{2,k}\|_\infty$. Dewisir, felly, $\|\phi - \phi_k\|_\infty$, gyda $\phi(x) = \mathrm{sech}(x)$, fel meintiolydd cyfeiliornad am gyfres benodol. Er mwyn enrhifo'r mesur, differir y fformiwlâu isod gynifer o weithiau ag sydd ei angen:

$$\mathrm{sech}(x) \star \mathrm{sech}(x) = \begin{cases} 2x\mathrm{cosech}(x), & \text{os yw } x \neq 0, \\ 2, & \text{os yw } x = 0; \end{cases} \tag{49}$$

$$\mathrm{sech}^2(x) \star \mathrm{sech}(x) = \tfrac{1}{2}\pi \mathrm{sech}^2(\tfrac{1}{2}x). \tag{50}$$

Ystyriwch ddilyniant Maclaurin o frasamcanion $\{h_k\}_{k=0}^\infty$, lle y rhoddwyd h_k gan (28) pan fo k yn odrif, a chan (29) pan fo k yn eilrif. Mae Tabl 1 yn dangos y cyfernodau hyd at y 10^{fed} drefn, ynghyd â meintiolydd cyfeiliornad pob brasamcan, $E_k = \|\phi - \phi_k\|_\infty \times 10^4$. Sylwch fod y lleihad yn E_k, fel bod k yn cynyddu, fwy neu lai yn geometrig, gyda $E_{k+1} \approx \frac{1}{2}E_k$. Gan osod targed $E_k = E = 1$, dyweder, mae cydgyfeiriant rhifiadol yn ei gyrraedd at y 12^{fed} drefn yn nilyniant Maclaurin.

Mae Tabl 2 yn dangos y cyfernodau yn y dilyniant $h^+_{2n+1} = \frac{3}{2}h_{2n+1} - \frac{1}{2}h_{2n}$, i frasamcanion hyd at y 9^{fed} drefn, ynghyd â meintiolydd cyfeiliornad pob , E^+_{2n+1}. Fel y disgwylir, mae cyfradd y lleihad o hyd, fwy neu lai, yn geometrig, gyda $E^+_{2n+1} \approx \frac{1}{4}E^+_{2n-1}$. Hefyd, gwelir bod $E^+_{2n+1} \approx E_{2n+2}$, yn cynnig fwy neu lai yr un cywirdeb â dilyniant Maclaurin wrth ddefnyddio un drefn differiad yn llai. Cyrhaeddir y targed $E = 1$ ar yr 11^{eg} drefn.

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	E_k
0	1	0										3634
1	0	1										2146
2	1	0	$-\frac{1}{2}$									1016
3	0	1	0	$-\frac{1}{6}$								531
4	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{24}$							262
5	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{120}$						133
6	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{720}$					66
7	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{5040}$				33
8	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{720}$	0	$\frac{1}{40320}$			17
9	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{5040}$	0	$\frac{1}{362880}$		8
10	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{720}$	0	$\frac{1}{40320}$	0	$-\frac{1}{3628800}$	4

Tabl 1: Y cyfernodau a'r mesurau meintoli cyfeiliornad am y fformiwlâu yn nilyniant Maclaurin, i'r 10^{fed} drefn. $E_k = \|\phi - \phi_k\|_\infty \times 10^4$.

7 Cywiriad dilyniannau tonnell

Gadewch i h_0 fod y term trefn sero yn nilyniant Maclaurin. Yn nhermau $H(\tau)$ a $G''(\omega)$, ysgrifennir y brasamcan $h \approx h_0$

$$H(\omega^{-1}) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G''(\omega)d\ln\omega,$$

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	E_k^+
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$									1402
3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$							289
5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{80}$					68
7	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{1440}$	$-\frac{1}{3360}$			17
9	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{1440}$	$-\frac{1}{3360}$	$-\frac{1}{80640}$	$\frac{1}{241920}$	4

Tabl 2: Y cyfernodau a'r mesurau meintoli cyfeiliornad am y fformiwlâu $h^+_{2n+1} = \frac{3}{2}h_{2n+1} - \frac{1}{2}h_{2n}$, i'r 9$^{\text{fed}}$ drefn. $E_k^+ = \|\phi - \phi_k^+\|_\infty \times 10^4$, $k = 2n+1$.

a elwir yn frasamcan Fuoss a Kirkwood (1941). Yn 2012, dangosodd Davies a Goulding fod y cyfeiliornad yn y brasamcan hwn yn donnell ddi-dor.

Ceir cyflwyniad cynhwysfawr i donellau yn llyfr Mallat (2009). Yn yr hyn sy'n dilyn, rhagdybir bod pob tonnell yn ddi-dor. Mae gan donnell graff mewn siâp ton ag arwynebedd sero. Yma, digon yw dweud bod ψ yn donnell os yw ψ yn ffwythiant gwerth-real yn $L^2(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ gyda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = \hat{\psi}(0) = 0.$$

Os yw ψ yn donnell, mae $\psi \star h$ hefyd yn donnell, pan fydd $h \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$. Felly, gan fod $\bar{D}^{2r}\text{sech}^2(x)$ a $\bar{D}^{2r}\text{sech}(x)$ yn donellau am bob cyfanrif $r \geq 1$, mae $\bar{D}^{2r+1}g_1$ a $\bar{D}^{2r}g_2$ yn donellau hefyd.

Gellir ysgrifennu'r cyfresi (21) a (22) fel y cyfresi tonnell isod:

$$h - h_0 = \sum_{r=0}^{\infty} \psi_{2r+1}, \tag{51}$$

$$\text{a} \quad h - h_0 = \sum_{r=0}^{\infty} 3^{2r}\psi_{2r+1}, \tag{52}$$

lle y mae, $\psi_1 = \frac{3}{2}(h_1 - h_0)$, a

$$\psi_{2r+1} = \frac{(-1)^r}{2\pi}[\frac{3}{(2r+1)!}\bar{D}^{2r+1}g_1 - \frac{1}{(2r)!}\bar{D}^{2r}g_2], \quad \text{os yw } r > 0. \tag{53}$$

Mae'r termau olynol yn y ddwy gyfres yn cyflwyno tonnell feinach ei graddfa, a thrwy hynny'n ychwanegu cywiriad trefn uwch i'r swm rhannol blaenorol. Mae'r amodau yn Theoremau (5.1) a (5.2) yn sicrhau cydgyfeiriant y cyfresi.

Mae'n eglur bod y ddwy gyfres (51) a (52) yn rhannu'r un sail tonnell. Darpara'r ddwy gyfres gywiriadau gwahanol trefn-uwch i fformiwla Fuoss a Kirkwood o drefn sero, a hefyd i'r fformiwla trefn gyntaf a gyflwynwyd gan Anderssen et al (2016). O ganlyniad, diffinnir *cywiriad dilyniant tonnell* newydd i frasamcan Fuoss a Kirkwood, h_0, fel:

$$h_k^\dagger = h_0 + \sum_{r=0}^{n} \beta_{2r+1}^{[k]} \psi_{2r+1}, \quad k = 2n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{54}$$

Caniateir i'r cyfernodau $\beta_{2r+1}^{[k]}$ yn (54) ddibynnu ar drefn y brasamcan, $k = 2n+1$. Fe'u dewisir mewn modd i gyflymu cydgyfeiriant y gyfres (54) yn rhifiadol, i'w chymharu â'r cyfresi a roddwyd gan (51) a (52). Dewisir y cyfernodau, felly, i fodloni

$$0 \le \|\phi - \phi_k^\dagger\|_\infty \le \lambda_k \|\phi - \phi_k^+\|_\infty, \quad 0 < \lambda_k < 1. \tag{55}$$

Gan fod $\phi_k^+ \to \phi$ fel bod $k \to \infty$, mae $\phi_k^\dagger \to \phi$ hefyd.

Fel enghraifft, ystyrier y brasamcan trefn gyntaf $h_1^\dagger = h_0 + \beta_1^{[1]}\psi_1$. Dewisir y cyfernod $\beta_1^{[1]}$ i leiafu'r mesur cyfeiliornad $\|\phi - \phi_0 - \beta\psi_1\|_\infty$ mewn perthynas â β, lle y mae $\phi(x) = \mathrm{sech}(x)$. Hynny yw, dewisir β fel bod $\beta\psi_1$ yn frasamcan *minimacs* 1-dimensiwn i'r donnell $\phi - \phi_0$. Cyflawnir hyn gan sicrhau bod y ffwythiant cyfeiliornad $\phi - \phi_0 - \beta\psi_1$ yn bodloni nodwedd hafal-osgiliad brasamcaniad minimacs. Mae'r eil-ffwythiannau $\{D^{2r}\mathrm{sech}(x)\}_{r=0}^n$ a $\{D^{2r}\mathrm{sech}^2(x)\}_{r=0}^n$ yn ffurfio setiau Chebyshev. Yn achos y ffwythiant prawf ϕ, felly, gellid disgwyl bod y sail tonnell $\{\psi_{2r+1}\}_{r=0}^n$ hefyd yn set Chebyshev. Defnyddiwyd algorithm cyfnewid Remez (gweler, er enghraifft, Powell 1981) i ddarganfod y cyfernodau-β wrth ganiatáu bod y ffwythiant cyfeiliornad $\phi - \phi_k^\dagger$ yn bodloni'r nodwedd hafal-osgiladiad minimacs am frasamcanion o drefn $k \le 9$, yn ddigon i gyrraedd targed $E < 1$. Mae Tabl 3 yn dangos y cyfernodau sy'n cynhyrchu'r mesurau cyfeiliornad cyfatebol $E_k^\dagger = \|\phi - \phi_k^\dagger\|_\infty \times 10^4$ i'r cyfanrif agosaf, gydag $E_9^\dagger \approx 0.6$.

k	$\beta_1^{[k]}$	$\beta_3^{[k]}$	$\beta_5^{[k]}$	$\beta_7^{[k]}$	$\beta_9^{[k]}$	$E_k^\dagger$
1	1.33950					644
3	0.92803	1.30185				113
5	1.01391	0.93164	1.42288			20
7	0.99748	1.01371	0.88387	1.57284		3
9	1.00047	0.99728	1.02779	0.80493	1.75039	< 1

Tabl 3: Cyfernodau a mesurau meintoli cyfeiliornad am y fformiwlâu (54), i'r 9fed drefn. $E_k^\dagger = \|\phi - \phi_k^\dagger\|_\infty \times 10^4$, $k = 2n+1$.

Mae cymharu'r mesurau E_k, E_k^+ a $E_k^\dagger$ yn Nhablau 1, 2 a 3 yn dangos bod y cywiriad dilyniant tonnell yn arddangos y gyfradd leihad gyflymaf. Mae'r lleihad eto, fwy neu lai, yn geometrig, pan fo k yn cynyddu, gyda $E_{2n+1}^\dagger \approx \frac{1}{6} E_{2n-1}^\dagger$. Hawdd yw disgwyl bod

$\beta^{[k]}_{2r+1} \to 1$ am $r < n-1$, fel bod $k \to \infty$, tra bod $\beta^{[k]}_{2n-1}$ yn lleihau a $\beta^{[k]}_{2n+1}$ yn cynyddu. Gellir mynegi (54) yn y ffurf (51) gyda $\beta^{[k]}_{2r+1}$ yn gweithredu fel lluosydd cyfernod, h.y. $\alpha_{2r} \mapsto \beta^{[k]}_{2r+1}\alpha_{2r}$ a $\alpha_{2r+1} \mapsto \beta^{[k]}_{2r+1}\alpha_{2r+1}$. Ym mrasamcan trefn k yn (51), felly, mae'r cywiriad mwyaf yn digwydd yn y pedwar cyfernod $\alpha_{2n+r}, r = -2, -1, 0$ a 1. Yn olaf, noder bod y fformiwla 7$^{\text{fed}}$ drefn yn y dilyniant tonnell (Tabl 3) yn cynnig cywirdeb tebyg i'r fformiwla 10$^{\text{fed}}$ drefn yn nilyniant Maclaurin (Tabl 1).

8 Diweddglo

Yn flaenorol, gweithredwyd dadymdroelliad y modwlws cymhlyg mewn glud-elastigedd llinol wrth ddiymdroelli'r rhannau real a dychmygol ar wahân. Yn gyfrifiannol, mae hyn yn rhoi dau amcangyfrif ar gyfer y sbectrwm llaciad, sy'n arwain at anghysondebau yn y modwlws stôr a'r modwlws colled a ailgyfrifiannwyd drwy'r sbectra gwahanol. Gellir osgoi gwahaniaethau yn y ddau fodwlws wrth gynrychioli'r sbectrwm fel cyfres deilliad cymysg. Dangoswyd yn yr erthygl bod dadymdroelliad y modwlws fel ffwythiant cymhlyg yn arwain at gyfres deilliad cymysg diddorol. Wrth ddewis sail neilltuol yn y gyfres hon, ffurfiwyd cywiriad dilyniant tonnell, a'i gyfernodau wedi eu dethol er mwyn cyflymu cyfradd gydgyfeiriant yn rhifiadiol, o gymharu â chyfres Maclaurin.

Mae'r fformiwla 7$^{\text{fed}}$ drefn yn y dilyniant tonnell yn Adran 7 yn rhoi cywirdeb tebyg i fformiwla'r 10$^{\text{fed}}$ drefn yn nilyniant Maclaurin. Lluniwyd fformiwla'r 7$^{\text{fed}}$ drefn wrth nodi, yn gyntaf, donnell neilltuol, ψ, ac yn ail, wrth leiafsymio'r ffwythiant cyfeiliornad sy'n gysylltiedig â ffwythiant prawf penodol, ϕ. Mae dewisiadau gwahanol o ψ a ϕ yn arwain at ddilyniannau gwahanol. Mae'n bosibl, felly, y gellir llunio cyfradd gydgyfeiriant rhifiadol hyd yn oed yn gynt.

Defnyddiwyd y pecyn meddalwedd *MAPLE* i wneud y cyfrifiadau yn yr erthygl.

Cydnabyddiadau

Carwn ddiolch i Dr Rob Douglas (Aberystwyth), Dr Karl-Michael Schmidt (Caerdydd) a'r Athro Marco Marletta (Caerdydd) am drafodaethau defnyddiol a chyffrous.

Llyfryddiaeth

Anderssen, R. S. et al. (2015), 'Derivative based algorithms for continuous relaxation spectrum recovery', *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 222, 132–40.

Anderssen, R. S. et al. (2015), 'Simple joint inversion localized formulae for relaxation spectrum recovery', *The ANZIAM Journal*, 58(1), 1–9.

Ankiewitz, S. et al. (2016), 'On the use of continuous relaxation sbectra to characterize model polymers', *Journal of Rheology*, 60(6), 1115–20.

Bernstein, S. N. (1928), 'Sur les fonctions absolument monotones', *Acta Mathematica*, 52(1), 1–66.

Davies, A. R., et al. (2016), 'Derivative spectroscopy and the continuous relaxation spectrum', *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 233, 107–18.

Davies, A. R., a Goulding, N. J. (2012), 'Wavelet regularization and the continuous relaxation spectrum', *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 189, 19–30.

Ferry, J. D. (1970), *Viscoelastic properties of polymers* (New York: Wiley).

Fuoss, R., a Kirkwood, J. (1941), 'Electrical Properties of Solids, VIII. Dipole Moments in Polyvinyl Chloride-Diphenyl Systems', *Journal of the American Chemical Society*, 63(2), 385–94.

Mallat, S. (2009), *A Wavelet Tour of Signal Processing. The Sparse Way* (San Diego: Academic Press).

McDougall, I., Orbey, N., a Dealy, J. (2014), 'Inferring meaningful relaxation sbectra from experimental data', *Journal of Rheology*, 53(3), 770–97.

Loy, R. J. et al. (2017), 'Convergence in relaxation spectrum recovery', *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 95(1), 121–32.

Powell, M. J. D. (1981), *Approximation theory and methods* (Cambridge: CUP).

Saut, J. C, a Joseph, D. D. (1983), 'Fading memory', *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 81(1), 53–95.

Tanner, R. I., a Walters, K. (1998), *Rheology: An Historical Perspective* (Amsterdam: Elsevier).

Tschoegl, N. W. (1989), *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behaviour* (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag).

Walters, K. (1975), *Rheometry* (London: Chapman and Hall).